Exercice 1:

$$z_1=\frac{3+6\mathbf{i}}{3-4\mathbf{i}}=-\frac{3}{5}+\frac{6}{5}\mathbf{i}$$
$$z_2=\left(\frac{1+\mathbf{i}}{2-\mathbf{i}}\right)^2+\frac{3+6\mathbf{i}}{3-4\mathbf{i}}=-\frac{23}{25}+\frac{36}{25}\mathbf{i}$$
$$z_3=\frac{2+5\mathbf{i}}{1-\mathbf{i}}+\frac{2-5\mathbf{i}}{1+\mathbf{i}}=2\mathfrak{Re}\left(\frac{2+5\mathbf{i}}{1-\mathbf{i}}\right)=-3$$

Exercice 2: *Egalité du parallélogramme*
Soit $(a,b)\in\mathbb{C}^2$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(|a-b|^2+|a+b|^2) &= \frac{1}{2}\big((a-b)\overline{(a-b)}+(a+b)\overline{(a+b)}\big)=\frac{1}{2}\big((a-b)(\overline{a}-\overline{b})+(a+b)(\overline{a}+\overline{b})\big)\\ &= \frac{1}{2}\big(a\overline{a}-a\overline{b}-b\overline{a}+\overline{b}b+a\overline{a}+a\overline{b}+b\overline{a}+\overline{b}b\big)=\frac{1}{2}\big(2|a|^2+2|b|^2\big)=|a|^2+|b|^2\end{aligned}$$

Exercice 3:

1. $Z\in\mathbb{U}\iff |Z|=1\Leftrightarrow\left|\dfrac{1+z}{1-z}\right|=1\Leftrightarrow|1+z|^2=|1-z|^2\Leftrightarrow z+\overline{z}=0\iff\mathfrak{Re}(z)=0\iff z\in\mathbf{i}\mathbb{R}$.
   Donc, $Z\in\mathbb{U}\Leftrightarrow z\in\mathbf{i}\mathbb{R}$
2. $Z\in\mathbf{i}\mathbb{R}\Leftrightarrow Z=-\overline{Z}\Leftrightarrow\dfrac{1+z}{1-z}=-\overline{\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)}\Leftrightarrow\dfrac{1+z}{1-z}=-\dfrac{\overline{1+z}}{\overline{1-z}}\Leftrightarrow\dfrac{1+z}{1-z}=-\dfrac{1+\overline{z}}{1-\overline{z}}$
   $\Leftrightarrow(1+z)(1-\overline{z})=-(1+\overline{z})(1-z)$.
   $\Leftrightarrow 1-\overline{z}+z-z\overline{z}=-(1-z+\overline{z}-z\overline{z})\Leftrightarrow 2(1-z\overline{z})=0\Leftrightarrow z\overline{z}=1\Leftrightarrow|z|=1\Leftrightarrow z\in\mathbb{U}$
   Donc, $Z\in\mathbf{i}\mathbb{R}\Leftrightarrow z\in\mathbb{U}$

Exercice 4: On applique les formules d'Euler pour le cosinus et le sinus

1. $\sin^2(\theta)\cos^2(\theta)=\left(\frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}-\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta}}{2\mathbf{i}}\right)^2\left(\frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}+\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta}}{2}\right)^2=\left(\frac{\mathbf{e}^{2\mathbf{i}\theta}-2\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta}+\mathbf{e}^{-2\mathbf{i}\theta}}{-4}\right)\left(\frac{\mathbf{e}^{2\mathbf{i}\theta}+2\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta}+\mathbf{e}^{-2\mathbf{i}\theta}}{4}\right)=\left(\frac{\mathbf{e}^{2\mathbf{i}\theta}-2+\mathbf{e}^{-2\mathbf{i}\theta}}{-4}\right)\left(\frac{\mathbf{e}^{2\mathbf{i}\theta}+2+\mathbf{e}^{-2\mathbf{i}\theta}}{4}\right)$
   $=\frac{\mathbf{e}^{4\mathbf{i}\theta}+2\mathbf{e}^{2\mathbf{i}\theta}+\mathbf{e}^{2\mathbf{i}\theta}\mathbf{e}^{-2\mathbf{i}\theta}-2\mathbf{e}^{2\mathbf{i}\theta}-4-2\mathbf{e}^{-2\mathbf{i}\theta}+\mathbf{e}^{-2\mathbf{i}\theta}\mathbf{e}^{2\mathbf{i}\theta}+2\mathbf{e}^{-2\mathbf{i}\theta}+\mathbf{e}^{-4\mathbf{i}\theta}}{-16}=\frac{\mathbf{e}^{4\mathbf{i}\theta}+\mathbf{e}^{-4\mathbf{i}\theta}-2}{-16}=\frac{1}{8}(1-\cos(4\theta))$

   On peut retrouver ce résultat avec les formules de trigonométrie classiques.
   On sait que : $\sin(2\theta)=2\cos(\theta)\sin(\theta)$ et que $\sin^2(x)=\frac{1-\cos(2x)}{2}$.
   donc $\sin^2(\theta)\cos^2(\theta)=\frac{1}{4}\sin^2(2\theta)=\frac{1}{4}\times\frac{1-\cos(4\theta)}{2}=\frac{1}{8}(1-\cos(4\theta))$.

   $\sin^3(3\theta)=\left(\frac{\mathbf{e}^{3\mathbf{i}\theta}-\mathbf{e}^{-3\mathbf{i}\theta}}{2\mathbf{i}}\right)^3=\frac{1}{-8\mathbf{i}}(\mathbf{e}^{9\mathbf{i}\theta}-3\mathbf{e}^{6\mathbf{i}\theta}\mathbf{e}^{-3\mathbf{i}\theta}+3\mathbf{e}^{3\mathbf{i}\theta}\mathbf{e}^{-6\mathbf{i}\theta}-\mathbf{e}^{-9\mathbf{i}\theta})=\frac{1}{-8\mathbf{i}}(\mathbf{e}^{9\mathbf{i}\theta}-3\mathbf{e}^{3\mathbf{i}\theta}+3\mathbf{e}^{-3\mathbf{i}\theta}-\mathbf{e}^{-9\mathbf{i}\theta})$
   $=\frac{1}{-8\mathbf{i}}(\mathbf{e}^{9\mathbf{i}\theta}-\mathbf{e}^{-9\mathbf{i}\theta}-3(\mathbf{e}^{3\mathbf{i}\theta}-\mathbf{e}^{-3\mathbf{i}\theta}))=\frac{\sin(9\theta)-3\sin(3\theta)}{-4}=\frac{3\sin(3\theta)-\sin(9\theta)}{4}$
2. Cette fois, on veut faire le travail dans l'autre sens et exprimer $\cos(4\theta)$ comme un polynôme en $\cos(\theta)$. Pour cela, on utilise l'autre lien entre $\cos(\theta)$ et $\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}$: $\cos(\theta)=\mathrm{Re}(\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta})$.

$$\begin{aligned}\cos(4\theta) &= \mathrm{Re}(\mathbf{e}^{4\mathbf{i}\theta})=\mathrm{Re}((\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta})^4)=\mathrm{Re}[(\cos(\theta)+\mathbf{i}\sin(\theta))^4]\\ (\cos(\theta)+\mathbf{i}\sin(\theta))^4 &= \cos^4(\theta)+4\mathbf{i}\cos^3(\theta)\sin(\theta)-6\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)-4\mathbf{i}\cos(\theta)\sin^3(\theta)+\sin^4(\theta)\\ \cos(4\theta) &= \cos^4(\theta)-6\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)+\sin^4(\theta)\\ &= \cos^4(\theta)-6\cos^2(\theta)(1-\cos^2(\theta))+(1-\cos^2(\theta))^2\\ &= 8\cos^4(\theta)-8\cos^2(\theta)+1\end{aligned}$$

Exercice 5:

1.

$$\begin{aligned} |z_1| &= \sqrt{(-3)^2+\sqrt{3}^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \\ z_1 &= 2\sqrt{3}\left(\frac{-3}{2\sqrt{3}} + \mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right) = 2\sqrt{3}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \mathbf{i}\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \mathbf{i}\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = 2\sqrt{3}\mathbf{e}^{\frac{5\mathbf{i}\pi}{6}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |z_2| &= \sqrt{(\sqrt{2})^2+\sqrt{6}^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \\ z_2 &= 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} + \mathbf{i}\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + \mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \mathbf{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\sqrt{2}\mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}\pi}{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |z_3| &= \sqrt{(\sqrt{8})^2+\sqrt{8}^2} = \sqrt{16} = 4 \\ z_3 &= 4\left(\frac{\sqrt{8}}{4} - \mathbf{i}\frac{\sqrt{8}}{4}\right) = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathbf{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + \mathbf{i}\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right) = 4\mathbf{e}^{\frac{-\mathbf{i}\pi}{4}} \end{aligned}$$

2.

$$Z = \frac{z_1^3 z_3^4}{z_2^6} = \frac{(2\sqrt{3}\mathbf{e}^{\frac{5\mathbf{i}\pi}{6}})^3(4\mathbf{e}^{\frac{-\mathbf{i}\pi}{4}})^4}{(2\sqrt{2}\mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}\pi}{3}})^6} = \frac{2^3.3\sqrt{3}\mathbf{e}^{\frac{5\mathbf{i}\pi}{2}}4^4\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\pi}}{2^6.2^3\mathbf{e}^{\frac{6\mathbf{i}\pi}{3}}} = -12\sqrt{3}\mathbf{e}^{\frac{5\mathbf{i}\pi}{2}} = 12\sqrt{3}\mathbf{e}^{\frac{-\mathbf{i}\pi}{2}}$$

3. $Z = -12\sqrt{3}i$.

Exercice 6: Soit $z \in \mathbb{C}$ que l'on note $z = r\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}$ sous forme exponentielle.

1. $\overline{z} = \overline{r\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}} = r\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta}$.
2. $-z = -r\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta} = \mathbf{e}^{\mathbf{i}\pi}r\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta} = r\mathbf{e}^{\mathbf{i}(\pi+\theta)}$.
3. $\mathbf{i}z = \mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{2}}r\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta} = r\mathbf{e}^{\mathbf{i}(\frac{\pi}{2}+\theta)}$
4. $z - \overline{z} = r\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta} - r\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta} = r(\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta} - \mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta}) = 2\mathbf{i}r\sin(\theta) = 2r\sin(\theta)\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{2}} = \begin{cases} 2r\sin(\theta)\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{2}} \text{ si } \sin(\theta) \geqslant 0 \\ -2r\sin(\theta)\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{3\pi}{2}} \text{ si } \sin(\theta) < 0 \end{cases}$

Exercice 7: Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On pose $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

1. t est bien défini lorsque $\theta \neq \pi[2\pi]$.
2. Lorsque cette condition est remplie, alors :
   $\cos(\theta) = 2\cos^2(\frac{\theta}{2}) - 1 = \frac{2}{1+\tan^2(\frac{\theta}{2})} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.
   $\sin^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta) = \frac{4t^2}{(1+t^2)^2}$. Or $\sin(\theta)$ est du signe de θ qui est du signe de t. D'où $\sin(\theta) = \frac{2t}{1+t^2}$.
   $\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{2t}{1-t^2}$.

Exercice 8: Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{cases} |z| = 1 \\ |z+1| = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} |z| = 1 \\ (z+1)\overline{(z+1)} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} |z| = 1 \\ z + \overline{z} = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} |z| = 1 \\ \mathfrak{Re}(z) = -\frac{1}{2} \end{cases} \iff z \in \left\{\mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}\pi}{3}}; \mathbf{e}^{-\frac{2\mathbf{i}\pi}{3}}\right\}$$

Géométriquement, les affixes recherchées sont celles des points d'intersection du cercle de centre 0 et de rayon 1 et du cercle de centre -1 et de rayon 1. Il n'y a donc au maximum que 2 affixes possibles qui sont $\mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}\pi}{3}}$ et $\mathbf{e}^{-\frac{2\mathbf{i}\pi}{3}}$.

Exercice 9:
Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$. On note O le point d'affixe 0, A le point d'affixe 1 et M le point d'affixe z.

1. $\dfrac{z}{1-z} \in \mathbb{R} \iff \dfrac{z-0}{z-1} \in \mathbb{R} \iff O$, A et M sont alignées $\iff z \in \mathbb{R}$.
   L'ensemble des points du plan recherché est donc l'ensemble des points de l'axe des abscisses privé de A.

2. $\dfrac{z}{1-z} \in \mathbb{U} \iff |z| = |1-z| \iff OM = AM \iff M$ est sur la médiatrice de $[OA] \iff \mathfrak{Re}(z) = \frac{1}{2}$.
   L'ensemble des points du plan recherché est donc la médiatrice de $[OA]$.

3. $\dfrac{z}{1-z} \in \mathbf{i}\mathbb{R} \iff \dfrac{0-z}{1-z} \in \mathbf{i}\mathbb{R} \iff$ les droites (OM) et (AM) sont orthogonales $\iff OAM$ est rectangle en $M \iff M$ appartient au cercle de centre d'affixe $\frac{1}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}$.
   L'ensemble des points du plan recherché est donc le cercle de centre d'affixe $\frac{1}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}$ privé de A.

Exercice 10:
Considérons les points A, B et C d'affixes respectives z, z^2 et z^3.
Le triangle ABC est isocèle en A lorsque $AB = AC$, c'est-à-dire $|z^2 - z| = |z^3 - z| \Leftrightarrow |z||z-1| = |z||z-1||z+1|$.
Le triangle est isocèle en A si, et seulement si, $|z| = 0$ ou $|1-z| = 0$ ou $|z+1| = 1$, c'est-à-dire $A = 0$ ou $A = 1$ ou A est sur le cercle de centre (-1,0) et de rayon 1.

Le triangle ABC est isocèle en B lorsque $BA = BC$, c'est-à-dire $|z - z^2| = |z^3 - z^2| \Leftrightarrow |z||1-z| = |z|^2|z-1|$.
Le triangle est isocèle en B si, et seulement si, $|z| = 0$ ou $|1-z| = 0$ ou $|z| = 1$, c'est-à-dire : $A = 0$ ou $A = 1$ ou A est sur le cercle trigonométrique.

Le triangle ABC est isocèle en C lorsque $CA = CB$, c'est-à-dire $|z^3 - z| = |z^2 - z^3| \Leftrightarrow |z||z-1||z+1| = |z|^2|z-1|$.
Le triangle est isocèle en C si, et seulement si,$|z| = 0$ ou $|z-1| = 0$ ou $|z+1| = |z|$, c'est-à-dire : $A = 0$ ou $A = 1$ ou A est sur la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$.

Exercice 11: Soient A, B et C trois points du plan d'affixe respectifs z_A, z_B et z_C.

$$
\begin{aligned}
\text{ABC équilatéral} \quad & \Leftrightarrow \left(AB = AC \text{ et } (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \frac{\pi}{3} \right) \text{ ou } \left(AB = AC \text{ et } (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = -\frac{\pi}{3} \right) \\
& \Leftrightarrow \left(|z_b - z_a| = |z_c - z_a| \text{ et } \arg(\frac{z_c - z_a}{z_b - z_a}) = \frac{\pi}{3}[2\pi] \right) \\
& \quad \text{ou } \left(|z_b - z_a| = |z_c - z_a| \text{ et } \arg(\frac{z_c - z_a}{z_b - z_a}) = -\frac{\pi}{3}[2\pi] \right) \\
& \Leftrightarrow \frac{z_c - z_a}{z_b - z_a} = \mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{3}} \text{ ou } \frac{z_c - z_a}{z_b - z_a} = \mathbf{e}^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{3}} \\
& \Leftrightarrow \frac{z_c - z_a}{z_b - z_a} = -\mathbf{j}^2 \text{ ou } \frac{z_c - z_a}{z_b - z_a} = -\mathbf{j} \\
& \Leftrightarrow z_c - z_a = -\mathbf{j}^2(z_b - z_a) \text{ ou } z_c - z_a = -\mathbf{j}(z_b - z_a) \\
& \Leftrightarrow z_c + z_a(-1 - \mathbf{j}^2) + \mathbf{j}^2 z_b = 0 \text{ ou } z_c + z_a(-1 - \mathbf{j}) + \mathbf{j} z_b = 0 \\
& \Leftrightarrow z_c + z_a\mathbf{j} + \mathbf{j}^2 z_b = 0 \text{ ou } z_c + z_a\mathbf{j}^2 + \mathbf{j} z_b = 0 \qquad \text{car } 1 + \mathbf{j} + \mathbf{j}^2 = 0 \\
& \Leftrightarrow \mathbf{j}^2 z_c + z_a + \mathbf{j} z_b = 0 \text{ ou } z_c\mathbf{j} + z_a + z_b\mathbf{j}^2 = 0 \qquad \text{on multiplie par } \mathbf{j}^2 \text{ ou par } \mathbf{j}
\end{aligned}
$$

Exercice 12: Résolvons les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1. On trouve $\mathbf{i}$ comme racine évidente puis par factorisation les 2 racines restantes sont : -2 et 3. D'où $S = \{-2, \mathbf{i}, 3\}$.

2. On trouve 1 comme racine évidente puis par factorisation les 2 racines restantes sont : $2\mathbf{i}$ et $3\mathbf{i}$. D'où $S = \{1, 2\mathbf{i}, 3\mathbf{i}\}$.

3. Notons $P(z) = z^3 - 2(1+2\mathbf{i})z^2 + (9\mathbf{i}-4)z + 5(1-\mathbf{i})$ On a $P(1) = 0$ donc 1 est solution.
   On a $P(z) = (z-1)(z^2 - (1+4\mathbf{i})z + 5(-1+\mathbf{i}))$.
   Résolvons l'équation (E') : $z^2 - (1+4\mathbf{i})z + 5(-1+\mathbf{i}) = 0$.
   $\Delta = (1+4\mathbf{i})^2 - 4\times 5(-1+\mathbf{i}) = -15 + 8\mathbf{i} + 20 - 20\mathbf{i} = 5 - 12\mathbf{i}$.
   À l'aide d'un calcul classique, on trouve que $\delta = 3 - 2\mathbf{i}$ est une racine carré de Δ.
   Les solutions de (E') sont donc $\frac{1+4\mathbf{i}+3-2\mathbf{i}}{2} = 2+\mathbf{i}$ et $\frac{1+4\mathbf{i}-3+2\mathbf{i}}{2} = -1+3\mathbf{i}$.
   Les solutions sont donc 1, $2+\mathbf{i}$ et $-1+3\mathbf{i}$.

Exercice 13: Les nombres complexes z_1 et z_2 tels que $z_1 + z_2 = 5 - 14\mathbf{i}$ et $z_1 z_2 = -2(12+5\mathbf{i})$ sont solutions de l'équation $z^2 - (5-14\mathbf{i})z - 2(12+5\mathbf{i}) = 0$.
Calculons : $\Delta = (5-14\mathbf{i})^2 + 8(12+5\mathbf{i}) = 25 - 140\mathbf{i} - 196 + 96 + 40i = -75 - 100i = 5^2(-3-4\mathbf{i})$.
On a $\Delta \neq 0$. Calculons les racines carrés de Δ. Soit $\delta = a + \mathbf{i}b \in \mathbb{C}$.

$$\delta^2 = \Delta \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = -3\times 5^2 \\ 2ab = -4\times 5^2 \\ a^2 + b^2 = 5^3 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 = 25 \\ ab = -2\times 5^2 \\ b^2 = 100 \end{cases} \iff (a,b) = (5,-10) \text{ ou } (a,b) = (-5,10).$$

D'où l'équation $z^2 - (5-14\mathbf{i})z - 2(12+5\mathbf{i}) = 0$ admet 2 solutions qui sont $\frac{5-14\mathbf{i}-5+10\mathbf{i}}{2} = 2\mathbf{i}$ et $\frac{5-14\mathbf{i}+5-10\mathbf{i}}{2} = 5 - 12\mathbf{i}$.
On a donc $z_1 = 2\mathbf{i}$ et $z_2 = 5 - 12\mathbf{i}$ ou inversement.

Exercice 14:

1. Soit $\delta = a + \mathbf{i}b \in \mathbb{C}$.

$$\delta^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \mathbf{i}\frac{1}{\sqrt{2}} \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2ab = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \\ 2ab = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ b^2 = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \end{cases} \iff (a,b) = \pm\left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}, \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}\right)$$

2. Les racines carrées de $\frac{1+\mathbf{i}}{\sqrt{2}} = \mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}\pi}{4}}$ sous forme trigonométrique sont $\mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}\pi}{8}}$ et $\mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}9\pi}{8}}$.

D'où $\cos(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$ et $\sin(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$.

Exercice 15:

1. $z^2 - 2\mathbf{i}z + 2 - 4\mathbf{i} = 0$ est une équation du second degré à coefficients complexes.

$$\Delta = (-2\mathbf{i})^2 - 4(2-4\mathbf{i}) = -12 + 16\mathbf{i}$$

   On doit maintenant chercher les deux racines carrés du complexes $-12+16\mathbf{i}$. On les cherche sous la forme $z = x + \mathbf{i}y$ ce qui donne le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} x^2 - y^2 = -12 \\ 2xy = 16 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x^2 = 8 \\ 2xy = 16 \\ -2y^2 = -32 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2 \text{ ou } x = -2 \\ xy = 8 \\ y = 4 \text{ ou } y = -4 \end{array}\right.$$

   Puisque x et y doivent être de même signe, on en déduit les solutions : $\delta = 2 + 4\mathbf{i}$ et $-\delta = -2 - 4\mathbf{i}$.
   On peut alors calculer les solutions de l'équation initiale :

$$z_1 = \frac{2\mathbf{i} + 2 + 4\mathbf{i}}{2} = 1 + 3\mathbf{i} \text{ ou } z_2 = \frac{2\mathbf{i} - 2 - 4\mathbf{i}}{2} = -1 - \mathbf{i}$$

2. Notons (E) : $z^6 + (2i-1)z^3 - 1 - \mathbf{i} = 0$.
   Soit $z \in \mathbb{C}$. Posons $Z = z^3$.
   On a l'équivalence : z sol. de (E) si et seulement si Z est solution de (E') : $Z^2 + (2i-1)Z - 1 - \mathbf{i} = 0$.
   L'équation (E') admet pour discriminant :

$$\Delta = (2\mathbf{i}-1)^2 - 4(-1-\mathbf{i}) = -4 - 4\mathbf{i} + 1 + 4 + 4\mathbf{i} = 1$$

Le discriminant est un nombre réel donc les solutions de (E') sont

$$Z_1 = \frac{-2\mathbf{i}+1-1}{2} = -\mathbf{i} = \mathbf{e}^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{2}} \text{ et } Z_2 = \frac{-2\mathbf{i}+1+1}{2} = 1-\mathbf{i} = \sqrt{2}\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{4}}$$

Par conséquent, z sol. de (E) si et seulement si $z^3 = \mathbf{e}^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{2}}$ ou $z^3 = \sqrt{2}\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{4}}$.
Conclusion :

$$z \text{ sol. de } (E) \iff z \in \left\{\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{6}}; \mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{7\pi}{6}}; \mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{2}} = i; \sqrt[6]{2}\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{12}}; \sqrt[6]{2}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{7\pi}{12}}; \sqrt[6]{2}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{15\pi}{12}}\right\}$$

3. On va modifier cette équation pour se ramener au racine n-ème de l'unité.

$$\begin{aligned}
(z+1)^n-(z-1)^n=0 \quad &\Leftrightarrow \quad (z+1)^n=(z-1)^n \Leftrightarrow \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 1 \text{ car } z=1 \text{ n'est pas solution.}\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{z+1}{z-1} = w^k \text{ pour } k\in [\![1,n-1]\!] \text{ et } w=\mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}\pi}{n}}\\
&\Leftrightarrow \quad z+1 = w^k(z-1) \text{ pour } k\in [\![1,n-1]\!] \text{ et } w=\mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}\pi}{n}}\\
&\Leftrightarrow \quad z(1-w^k) = -1-w^k \text{ pour } k\in [\![1,n-1]\!] \text{ et } w=\mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}\pi}{n}}\\
&\Leftrightarrow \quad z = \frac{(1+w^k)}{w^k-1} \text{ pour } k\in [\![1,n-1]\!] \text{ et } w=\mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}\pi}{n}}\\
&\Leftrightarrow \quad \exists k\in [\![1,n-1]\!], z = \frac{\mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}k\pi}{n}}\left(\mathbf{e}^{-\frac{\mathbf{i}k\pi}{n}}+\mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}k\pi}{n}}\right)}{\mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}k\pi}{n}}\left(\mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}k\pi}{n}}-\mathbf{e}^{-\frac{\mathbf{i}k\pi}{n}}\right)}\\
&\Leftrightarrow \quad \exists k\in [\![1,n-1]\!], z = -\frac{\cos(\frac{k\pi}{n})}{\sin(\frac{k\pi}{n})}\mathbf{i}
\end{aligned}$$

Exercice 16: *Racines n-ième*

1. On a $2+\mathbf{i}\sqrt{12} = 4\left(\frac{1}{2}+\mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{3}}$ donc les racines quatrièmes de $2+\mathbf{i}\sqrt{12}$ sont

$$\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt{2}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{12}}\\
z_1 &= \sqrt{2}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{12}} \times \mathbf{i} = \sqrt{2}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{7\pi}{12}}\\
z_2 &= \mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{12}} \times (-1) = \sqrt{2}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{13\pi}{12}}\\
z_3 &= \mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{12}} \times (-\mathbf{i}) = \sqrt{2}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{19\pi}{12}}
\end{aligned}$$

2. Nous cherchons les racines $n$ième de $1+\mathbf{i}$ sous leur forme exponentielle.

$$z^n = 1+\mathbf{i} \Leftrightarrow (r\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta})^n = \sqrt{2}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{4}} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} r^n = \sqrt{2} \\ n\theta = \frac{\pi}{4}[2\pi] \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} r = \sqrt{2}^{\frac{1}{n}} = 2^{\frac{1}{2n}} \\ \theta = \frac{\pi}{4n}+\frac{2k\pi}{n} \text{ pour } 0\leqslant k\leqslant n-1 \end{array}\right.$$

Exercice 17:

1.

$$\mathbf{e}^z = \mathbf{j} \Leftrightarrow \mathbf{e}^{\mathrm{Re}(z)}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\mathrm{Im}(z)} = \mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}\pi}{3}} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \mathbf{e}^{\mathrm{Re}(z)} = 1 \\ \mathrm{Im}(z) = \frac{2\pi}{3}[2\pi] \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \mathrm{Re}(z) = 0 \\ \mathrm{Im}(z) = \frac{2\pi}{3}+2k\pi \text{ pour } k\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Donc, les solutions de l'équation sont $S = \left\{z = \mathbf{i}\left(\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right) \text{ pour } k\in\mathbb{Z}\right\}$

2. $z=-\mathbf{i}$ n'est pas solution de cette équation. Soit $z\in\mathbb{C}\setminus\{-\mathbf{i}\}$.

$$\frac{\mathbf{i}-z}{\mathbf{i}+z}=\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}\Leftrightarrow \mathbf{i}-z=\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}(\mathbf{i}+z)\Leftrightarrow z(-1-\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta})=\mathbf{i}(\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}-1)\Leftrightarrow z(1+\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta})=\mathbf{i}(1-\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta})$$

Si θ est tel que $\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}=-1$, c'est-à-dire si $\theta\in\pi+2\pi\mathbb{Z}$, l'équation devient $0=2\mathbf{i}$, ce qui est absurde donc l'équation n'a pas de solution.
Si $\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}\neq -1$

$$\frac{\mathbf{i}-z}{\mathbf{i}+z}=\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}\Leftrightarrow z=\frac{\mathbf{i}(1-\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta})}{1+\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}}=\mathbf{i}\frac{\mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}\theta}{2}}(\mathbf{e}^{\frac{-\mathbf{i}\theta}{2}}-\mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}\theta}{2}})}{\mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}\theta}{2}}(\mathbf{e}^{\frac{-\mathbf{i}\theta}{2}}+\mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}\theta}{2}})}=\mathbf{i}\frac{-2\mathbf{i}\sin(\frac{\theta}{2})}{2\cos(\frac{\theta}{2})}=\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

<u>Exercice</u> <u>18</u>: On note $w=\mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}\pi}{5}}$, $a=w+w^4$ et $b=w^2+w^3$.

1. $\mathbb{U}_5=\{1,w,w^2,w^3,w^4\}$.
2.

$$a=w+w^4=\mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}\pi}{5}}+\left(\mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}\pi}{5}}\right)^4=\mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}\pi}{5}}+\mathbf{e}^{\frac{8\mathbf{i}\pi}{5}}=\mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}\pi}{5}}+\mathbf{e}^{\frac{-2\mathbf{i}\pi}{5}}=2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

$$b=w^2+w^3=(\mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}\pi}{5}})^2+\left(\mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}\pi}{5}}\right)^3=\mathbf{e}^{\frac{4\mathbf{i}\pi}{5}}+\mathbf{e}^{\frac{6\mathbf{i}\pi}{5}}=\mathbf{e}^{\frac{4\mathbf{i}\pi}{5}}+\mathbf{e}^{\frac{-4\mathbf{i}\pi}{5}}=2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$$

3. On a $1+w+w^2+w^3+w^4=\frac{1-w^5}{1-w}=0$.
4. Les complexes a et b sont solutions de l'équation du second degré : $z^2-(a+b)z+ab=0$. Nous devons calculer $a+b$ et ab.

$$\begin{aligned}a+b&=w+w^4+w^2+w^3=w+w^2+w^3+w^4=-1\\ ab&=(w+w^4)(w^2+w^3)=w^3+w^4+w^6+w^7=w^3+w^4+w^5.w+w^5.w^2=w^3+w^4+w+w^2=-1\end{aligned}$$

Donc a et b sont solutions de l'équation $z^2+z-1=0$.

5. $\Delta=1-(-4)=5$. Il y a donc deux solutions réelles : $z_1=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $z_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Une de ces solutions est a et l'autre est b.
L'angle $\frac{2\pi}{5}$ est dans le premier cadran dons $a=2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)>0$ donc $a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ et $b=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.
On a donc

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)&=\frac{a}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\\ \sin^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)&=1-\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)=1-\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{16}=1-\frac{6-2\sqrt{5}}{16}=\frac{10+2\sqrt{5}}{16}\end{aligned}$$

Puisque l'angle $\frac{2\pi}{5}$ est dans le premier cadran, $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est un nombre positif .

$$\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{16}}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

<u>Exercice</u> <u>19</u>:

1. $\cos(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\iff x\equiv\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$ ou $x\equiv-\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$
2. $\sin(x)=-\frac{1}{2}\iff x\equiv-\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$ ou $x\equiv\frac{7\pi}{6}\ [2\pi]$

3. $\tan(x) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \iff x \equiv -\frac{\pi}{6}\ [\pi]$
4. $\cos(x) + \sin(x) = 0 \underset{x \neq \frac{\pi}{2}[\pi]}{\iff} \tan x = -1 \iff x \equiv -\frac{\pi}{4}\ [\pi]$
5. $\cos(x) = -\cos(2x) \iff 2\cos(\frac{2x+x}{2})\cos(\frac{2x-x}{2}) = 0 \iff \cos(\frac{3x}{2})\cos(\frac{x}{2}) = 0$
   D'où $\cos(x) = -\cos(2x) \iff \frac{3x}{2} \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ ou $\frac{x}{2} \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \iff x \equiv \frac{\pi}{3}\ [\frac{2\pi}{3}]$ ou $x \equiv \pi\ [2\pi] \iff x \equiv \frac{\pi}{3}\ [\frac{2\pi}{3}]$
6. $\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = 1 \iff \frac{1}{2}\cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x) = \frac{1}{2} \iff \cos(x + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$
   D'où $\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = 1 \iff x \equiv \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ ou $x \equiv -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \iff x \equiv 0\ [2\pi]$ ou $x \equiv -\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$
7. $\tan(x) = \tan(2x) \iff \sin(x)\cos(2x) = \sin(2x)\cos(x)$ et $x \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$ et $x \neq \frac{\pi}{4}[\frac{\pi}{2}] \iff \sin(2x - x) = 0 \iff x \equiv 0\ [\pi]$
8. $\cos(x) \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2} \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x \in [\frac{3\pi}{4} + 2k\pi; \frac{5\pi}{4} + 2k\pi]$
9. $\sin(x) > \frac{\sqrt{3}}{2} \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x \in]\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{2\pi}{3} + 2k\pi[$
10. $\tan(x) \geqslant \sqrt{3} \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x \in [\frac{\pi}{3} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[$
11. $\cos x + \sin x < 0 \iff \cos(x - \frac{\pi}{4}) < 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x - \frac{\pi}{4} \in]\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi[$
    D'où $\cos(x) + \sin(x) < 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x \in]\frac{3\pi}{4} + 2k\pi; \frac{7\pi}{4} + 2k\pi[$
12. Les fonctions considérées étant 2π-périodiques, on résout d'abord l'inéquation sur $[0; 2\pi]$. Soit $x \in [0; 2\pi]$,
    $\cos(x) \leqslant -\cos(2x) \iff \cos(\frac{3x}{2})\cos(\frac{x}{2}) \leqslant 0 \iff \left(\cos(\frac{3x}{2}) \leqslant 0 \text{ et } \cos(\frac{x}{2}) \geqslant 0\right)$ ou $\left(\cos(\frac{3x}{2}) \geqslant 0 \text{ et } \cos(\frac{x}{2}) \leqslant 0\right)$
    $\cos(x) \leqslant -\cos(2x) \iff x \in \left(\left([\frac{\pi}{3}; \pi] \cup [\frac{5\pi}{3}; 2\pi]\right) \cap [0; \pi]\right) \cup \left(\left([0; \frac{\pi}{3}] \cup [\pi; \frac{5\pi}{3}]\right) \cap [\pi; 2\pi]\right) \iff x \in [\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}]$
    Résolution sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) \leqslant -\cos(2x) \iff \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x \in [\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{5\pi}{3} + 2k\pi]$

Exercice 20:

1. f_1 correspond à la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe $1 + \mathbf{i}$.
2. Nous devons chercher les potentiels points fixes de cette transformation

$$\forall z \in \mathbb{C},\ f_2(z) = z \Leftrightarrow 2z + 1 + \mathbf{i} = z \Leftrightarrow z = -1 - \mathbf{i}$$

   L'unique point fixe est le point A d'affixe $-1 - \mathbf{i}$.

$$\forall z \in \mathbb{C},\ f_2(z) - z_a = 2z + 1 + \mathbf{i} - (-1 - \mathbf{i}) = 2(z + 1 + \mathbf{i}) = 2(z - z_a)$$

   f_2 correspond donc à l'homothétie de rapport 2 et de centre A de coordonnées $(-1, -1)$.

3. f_3 correspond à la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 21:

1. $\begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto z + 3 - 4\mathbf{i} \end{cases}$
2. $\begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto 3(z - 1 - \mathbf{i}) + 1 + \mathbf{i} \end{cases}$
3. $\begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{6}}(z - 1 - \mathbf{i}) + 1 + \mathbf{i} \end{cases}$
4. $\begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{6}}(3(z - 1 - \mathbf{i}) + 1 + \mathbf{i}) + 1 + \mathbf{i} = \mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{6}}(3z - 2 - 2\mathbf{i}) + 1 + \mathbf{i} \end{cases}$